フィロス動画

# 行列の積

## ～ 連立１次方程式から量子力学まで ～

坂野　斎
banno@yamanashi.ac.jp

フィロス，山梨大学工学部基礎教育センター

2020.05.25

# 行列の和と積

## 積演算の違和感の起源

$\boxed{\text{行列の和}}$ 定義 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ ;$A, B$ は同じ型

加法は行列要素同士の足し算なので，実数の加法の性質を継承．

| | 行列 | 実数 |
|---|---|---|
| 結合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$ | OK | OK |
| 交換律： $A+B=B+A$ | OK | OK |

$\boxed{\text{行列の積}}$ 定義 $AB=(\sum_k a_{ik}b_{kj})$，$A$ の列数 $=B$ の行数

乗法は行列要素同士の積算ではなく：$AB\neq(a_{ij}b_{ij})$，実数の乗法の性質を継承する保証はない．

| | 行列 | 実数 |
|---|---|---|
| 結合律： $(AB)C=A(BC)$ | OK | OK |
| 交換律： $AB=BA$ | 不成立 | OK |

行列の積：実数の積から継承しない性質：

- 積が定義されないことあり．
- 交換律は成立しない．
- 逆元が存在しない条件は $A=O$ より緩い $\det A=0$．
- $AB=O$ は，$A\neq O$，かつ，$B\neq O$ で実現しうる（零因子の存在）．

このような行列の積をあえて定義する動機は，連立１次方程式を効率よく解くため．

# 拡大係数行列と基本変形：掃き出し法

2 行目を 1/2 倍 ⇒　　　1 行目と 2 行目を交換 ⇒

$$\begin{cases} 3x + 4y = 550 \\ 2x + 2y = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y = 550 \\ x + y = 150 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 150 \\ 3x + 4y = 550 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 \\ 300 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathsf{A} \quad \mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 550 \\ 2 & 2 & 300 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 550 \\ 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 3 & 4 & 550 \end{array}\right)$$

$$\boxed{( \quad A \quad | \, \mathbf{b} \, )}$$

2 行目に (-3) 倍の 1 行目を加える ⇒　　　1 行目に (-1) 倍の 2 行目を加える ⇒

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ \quad\;\; y = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x \qquad = 50 \\ \quad\;\; y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

$$\boxed{( \quad E \quad | \, \mathbf{x} \, )}$$

**掃き出し法** 拡大係数行列 ( $A$ | $\mathbf{b}$ ) の $A$ を基本変形で単位行列に近づけることで解 $\mathbf{x}$ を得る.

# 基本変形と基本行列：逆行列を使う解法

| 2 行目を 1/2 倍 $\Rightarrow$ | 1 行目と 2 行目を交換 $\Rightarrow$ |
|---|---|

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | \, 550 \\ 2 & 2 & | \, 300 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & | \, 550 \\ 1 & 1 & | \, 150 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & | \, 150 \\ 3 & 4 & | \, 550 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left( \quad A \quad | \, \mathbf{b} \ \right)} \qquad \| \qquad \|$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & | \, 550 \\ 2 & 2 & | \, 300 \end{pmatrix}}_{(\ A \ | \, \mathbf{b} \ )} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & | \, 550 \\ 1 & 1 & | \, 150 \end{pmatrix}}_{P_1 (\ A \ | \, \mathbf{b} \ )}$$

| 2 行目に (-3) 倍の 1 行目を加える $\Rightarrow$ | 1 行目に (-1) 倍の 2 行目を加える $\Rightarrow$ |
|---|---|

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | \, 150 \\ 0 & 1 & | \, 100 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | \ \ 50 \\ 0 & 1 & | \, 100 \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad \boxed{\left( \quad E \quad | \, \mathbf{x} \ \right)} \ \|$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{P_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & | \, 150 \\ 3 & 4 & | \, 550 \end{pmatrix}}_{P_2 P_1 (\ A \ | \, \mathbf{b} \ )} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & | \, 150 \\ 0 & 1 & | \, 100 \end{pmatrix}}_{P_3 P_2 P_1 (\ A \ | \, \mathbf{b} \ )}$$

$(\ E \mid \mathbf{x}\ ) = P_4\,P_3\,P_2\,P_1\,(\ A \mid \mathbf{b}\ )$ を部分に分けると，

$$\begin{cases} E = P_4\,P_3\,P_2\,P_1 A & \rightarrow \quad A^{-1} \quad \equiv \quad P_4\,P_3\,P_2\,P_1 \quad \text{逆行列} \\ \mathbf{x} = P_4\,P_3\,P_2\,P_1 \mathbf{b} & \rightarrow \quad \mathbf{x} \quad = \quad A^{-1}\,\mathbf{b} \end{cases}$$

**逆行列を用いる解法**　$A^{-1}$ を予め求めておき，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に左から掛け，解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ を得る．

# 因果関係をあらわす行列

- 行列とその積は，連立１次方程式を系統的・効率的に解く道具として導入．
- 掃き出し法では，拡大係数行列の「基本変形」で解に到達；行列はわかりやすい記法．
- 「基本変形」の正体は，「基本行列」を拡大係数行列（入力）に掛けて，次の段階の拡大係数行列（出力）をつくること．

ここにおいて，行列とその積は，入力と出力の因果関係を表現；「１次変換」とか「線形写像」を表現するものとして概念的進歩をとげ，線形代数学の学問が成立．

線形代数には「景色のよい高見」がある：そこに至ればあらゆる線形性をもつ系は行列とベクトルで表せる，という感覚を得る．線形性とは入力が２倍になれば出力も２倍になるという比例の拡張概念．

「線形性」に気づけば，対象が何であっても線形代数学を適用でき，行列とベクトルに還元できる．

# 量子性を表す行列

- ハイゼンベルグは量子力学のシュレディンガー方程式の線形性に着目，そこに現れる物理量を行列で表現.
- 物理量の行列は，測定前の状態ベクトル（入力）から測定後の状態ベクトル（出力）への遷移（因果関係）を記述．特にに小さな物体では測定の影響は無視できない.
- 例えば，電子に光を照射して位置の測定をすると，光の量子（光子）を吸収した電子の運動量が変わり，引き続く運動量の測定は元の状態の測定ではなくなる．また，逆順：運動量の測定後に位置の測定する過程と同等でない.
- このような位置と運動量の同時測定不可能性は，位置と運動量を表す行列の積の交換不可能で表現され，ここから有名なハイゼンベルグの不確定性原理が導出される.
- 行列の積の交換不成立で表現される「量子性」は現代物理学の了解事項.
- 量子論はまだ未完成という見方もある．実際，物理量を行列で表すだけでは，測定過程の詳細が考慮されないことに着目してハイゼンベルグの不確定性原理の厳密化がなされている（小澤の不等式）.